Resolvent収束とその物理的応用 (ハミルトニアンの定義とスペクトル)

関根, 克彦

数理解析研究所講究録
159巻 1972年 1-26

Resolvent 収束とその物理的応用

明星大 理工　関根 克彦

§ 1. 定義と定理

はじめに, T. Kato [1] に従って, いくつかの定義と定理を述べる.

X を Banach 空間とし, $\{T_n\}$ を X における closed operator の列とする. T_n の resolvent を $R_n(z)$ と書く:

$$(1.1) \qquad R_n(z) = (T_n - z)^{-1}.$$

ここで,

$$(1.2) \qquad \text{s-}\lim_{n\to\infty} R_n(z) = R'(z)$$

が存在するような複素数 z の集合を, Δ_s と書く. T_n の resolvent set を $\rho(T_n)$ と書けば, 十分大きい n にたいして, $\Delta_s \subset \rho(T_n)$.

$z \in \Delta_s$ のとき, $R'(z)$ は必ずしもある演算子の resolvent であるとは限らない. しかし次の方程式を満たす:

$$R'(z_1) - R'(z_2) = (z_1 - z_2) R'(z_1) R'(z_2), \quad z_1, z_2 \in \Delta_s.$$

この関係を満たす $R'(z)$ のことを pseudo-resolvent という．pseudo-resolvent の kernel も，range も，z によらないことは簡単に証明できる．pseudo-resolvent $R'(z)$ が，ある closed operator T の resolvent であるための必要十分条件は，$R'(z)$ の共通の kernel が $\{0\}$ に等しいこと，いいかえると，$R'(z)$ が invertible であることである．

定理 1．Δ_s は空でないという仮定のもとで，次の alternative が成り立つ：

（A）どの $z \in \Delta_s$ にたいしても，$R'(z)$ は invertible でない．

（B）closed operator T が存在して，すべての $z \in \Delta_s$ にたいし，

（1．3） $$R'(z) = (T - z)^{-1} \equiv R(z).$$

この場合，closed operator T はユニークにきまり，また $\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b$ である．

Δ_b は，$\{\| R_n(z) \|\}$ が十分大きい n にたいして有界であるような複素数 z の集合をあらわす．明かに $\Delta_s \subset \Delta_b$．

上の（B）が成り立っている場合に，closed operator の列 $\{T_n\}$ は Δ_s 上で T に"一般化された意味で"強収束する [1]，あるいは Resolvent 収束する（略して R 収束する）[2]

という．これを，

(1.4)　　$T_n \xrightarrow{R} T$　　（Δ_s の上で）

と書く．

定理の alternative によって，この命題と，次の命題とは同値である：

(1.5)　　$\text{s-}\lim_{n\to\infty} R_n(z_0) = R(z)$

（ある $z_0 \in \mathbb{C}$ にたいし）

とくに X がヒルベルト空間で，T_n，T が自己共役演算子である場合には，すべての non real z は Δ_s に入っていることを注意しておく．

<u>定理 2</u>．X を Banach 空間，T_n，T は X における closed operator とし，T の core で次の条件を満たすもの D が存在するとする．すなわち，十分大きい n にたいし $D \subset D(T_n)$，すべての $u \in D$ にたいし $T_n u \xrightarrow{s} Tu$，さらに $\rho(T) \cap \Delta_b \neq \phi$ を仮定する．このとき，

$$T_n \xrightarrow{R} T \quad (\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b \text{ 上で}).$$

<u>注意</u>．とくに X がヒルベルト空間で，T_n，T が自己共役演算子である場合，すべての non real z は $\rho(T) \cap \Delta_b$ に入っているから，この集合が空でないという仮定は自明的に満たされる．

ここで，定理２が述べているのは，R収束のための一つの十分条件であって，必要条件ではないことに注意しておく．すなわち，これはR収束の特別の場合であって，以下で見るように，この定理の条件を満たしていないR収束の例がある．

$T_n \xrightarrow{R} T$ のとき，T_n，T によってそれぞれ生成される one-parameter semigroup の間にもある関係が生ずる．

<u>定理３</u>．X を Banach 空間，T_n，T を X における closed operator とする．さらに，次の条件が満たされているとする：

(i) T_n, T は X において densely defined.

(ii) $\beta \in \mathbb{R}$ と $M \geqq 0$ が存在して，

$$\| (T_n + \xi)^{-k} \| \leqq M(\xi - \beta)^{-k}$$

$$\| (T + \xi)^{-k} \| \leqq M(\xi - \beta)^{-k}$$

ただし $\xi > \beta$ で，$k = 1, 2, \cdots$．ここに β と M は n によらないものとする．これらの条件のもとで，もし，$\mathrm{Re}\, \zeta > \beta$ なるある ζ にたいして

(1) $\quad (T_n + \zeta)^{-1} \xrightarrow{s} (T + \zeta)^{-1}$

なら，そのとき

(2) $\quad e^{-tT_n} \xrightarrow{s} e^{-tT}$

で，この収束は $t \geqq 0$ のどの有限区間においても一様である．

逆に，tのある有限区間で（2）が成り立てば，（1）が，$\mathrm{Re}\, z > \beta$ なるすべてのzにたいして成り立つ．

注意．上の定理で，命題（1）は $T_n \xrightarrow{R} T$ （$\Delta_s \neq \phi$ の上で）と同値である．

量子力学や場の理論で通常問題になるのは，Xがヒルベルト空間で，$-iT_n = H_n$，$-iT = H$ が自己共役演算子である場合である．このとき semigroup は unitary group になる．とくにこの場合については，定理3から次の系が得られる．

系．H_n，Hをヒルベルト空間における自己共役演算子とするとき，

（1）　$H_n \xrightarrow{R} H$

なら，

（2）　$e^{-iH_n t} \xrightarrow{s} e^{-iHt}$，　$-\infty < t < \infty$，

で，この収束はtの任意の有限区間において一様である．逆に，tのある有限区間で（2）が成り立てば，（1）が成り立つ．

実際，自己共役演算子にたいしては，定理3の条件（i）は定義によって自動的に満たされ，（ii）は $\beta = 0$，$M = 1$ として満たされる．

H_n，Hがヒルベルト空間の自己共役演算子で，$H_n \xrightarrow{R} H$

であるとき，H_nのスペクトルとHのスペクトルの间の関係については，次のような定理がある．

定理4．H_n, Hのスペクトル分解をそれぞれ

$$H_n = \int \lambda dE_n(\lambda), \qquad H = \int \lambda \cdot dE(\lambda),$$

とする．もし，$H_n \xrightarrow{R} H$ なら，

$$(1.6) \qquad \underset{n\to\infty}{s\text{-}\lim}\ E_n(\lambda) = E(\lambda)$$

が，$E(\lambda-0) = E(\lambda)$ なる点λにおいて成り立つ．

注意．ここで，最後の条件は，$\lambda \in \rho(H)$のとき，および$\lambda \in C\sigma(H)$（Hの連続スペクトル）のとき満たされる．

一般に，H_nのスペクトルとHのスペクトルとは，かなり違ったものであり得る．たとえば，H_nの離散スペクトルがだんだん密集して来てHの連続スペクトルになる，というような例もある．

以上でR収束にかんする主な定理の紹介を終るが，上で列$\{T_n\}$や$\{R_n(\zeta)\}$の収束について述べたことは，列のかわりに，ある連続パラメータκに依存する family $\{T_\kappa\}$や$\{R_\kappa(\zeta)\}$についても同様であることを注意しておく．

§2．量子力学における運動量演算子

x軸上の有限区間 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ を運動する粒子を考える．量子力学では，この粒子の運動量は，ヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ における演算子

(2.1) $\qquad \hat{p} : \quad \varphi \longmapsto -i\dfrac{d\varphi}{dx}$

によって表わされる．ただし，定義域 $D(\hat{p})$ は，以下の性質をもつ関数 φ の集まりであるとする：

(i) $\quad \varphi \in \mathcal{L}^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$.

(ii) $\quad \varphi$ は殆どいたるところ微分可能で，$\dfrac{d\varphi}{dx} \in \mathcal{L}^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$.

(iii) $\quad \varphi(-\frac{L}{2}) = \varphi(\frac{L}{2})$.

このように定義された $\hat{p}$ は，ヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ における自己共役演算子である．

さて，$\varphi \in \mathcal{L}^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ は次のようにフーリエ級数に展開できる：

(2.2) $\qquad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}, \qquad k_n = \dfrac{2\pi n}{L}$.

ここで，$\{c_n\} \in \ell^2$ である．このとき，

$$\hat{p}\,\varphi(x) = \sum k_n c_n e^{ik_n x}$$

だから，$\hat{p}$ によって ℓ^2 に誘導される写像として，

(2.3) $\qquad c_n \longmapsto k_n c_n$

を得る．

他方，$\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ なるヒルベルト空間を考えて，その元を $f(k)$ と書き，$\{c_n\} \in \ell^2$ の各々に次のような $f(k)$

を対応させる：

(2.4) $\quad f(k) = c_n, \quad (k_n \leqq k < k_{n+1}$ のとき)

明かに，

(2.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 dk = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

ここで，$\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ における演算子

(2.6) $$P_L : \quad f(k) \longmapsto k_n f(k),$$
$$(k_n \leqq k < k_{n+1} \text{ のとき})$$

を考える．$f(k)$ がとくに (2.4) の形であれば，P_L は (2.3) を与える．P_L とならんで，やはり $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ における演算子

(2.7) $$P : \quad f(k) \longmapsto k f(k)$$

を定義する．

P_L も P も $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ における自己共役演算子である．そして，$L \to \infty$ のとき，

(2.8) $$P_L \xrightarrow{R} P$$

であることが示せる．

この例では，定義域 $D(P)$ 自身を P の core としてとると，

$$D \equiv D(P) \subset D(P_L)$$

になっており，すべての $f \in D$ にたいして，

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{L\to\infty} P_L f = Pf$$

がいえる．従って，これは，定理２（§１）の条件を満たすR収束の例である．

スペクトルにかんしては，P_L の離散スペクトルが密集して，Pの連続スペクトルになっている．定理４の関係（1.6）が成り立っていることは，直接計算して確かめることが出来る．

§3．質量のくりこみがある場の理論のモデル［3］

二種類の粒子が存在するとして，それらをC粒子，A粒子と名づける．それらの間に，$C \leftrightarrow A + A$ という相互作用があるとする．

C粒子は静止質量 $\mu < 0$ を，A粒子は通常の非相対論的な運動エネルギー $\frac{1}{2m}\vec{k}^2$（$m > 0$）をもつとする．ここに $\vec{k}$ はこの粒子の運動量ベクトルである．以下簡単のため $m = 1$ にとる．

C粒子が静止している坐標系において，二個のA粒子が生じたとき，それらの運動量はそれぞれ $\vec{k}$，$-\vec{k}$ で，エネルギーの和は k^2 である．

このような物理系を記述するためのヒルベルト空間として，

$$X = \mathbb{C} \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \tag{3.1}$$

をとり，その元を $x=(\alpha,\beta(\vec{k}))$ と書く．ここで $\alpha\in\mathbb{C}$ は静止している一個のC粒子の状態をあらわし，$\beta\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ は，運動量が $\vec{k}$ と $-\vec{k}$ の二個のA粒子を記述する波動関数である．

ハミルトニアンとして，Xにおける次のような演算子を考える．

(3.2) $$H_K:\quad\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}(\mu-\delta\mu_K)\alpha+g_0(f_K,\beta)\\ g_0f_K\alpha\ +\ k^2\beta\end{pmatrix}$$

ここで，

(3.3) $$\delta\mu_K\ =\ -g_0^2\int\frac{|f_K(\vec{k})|^2}{k^2-\mu}\,d^3k,$$

$$(f_K,\beta)\ =\ \int\bar{f}_K(\vec{k})\beta(\vec{k})\,d^3k.$$

積分は $\mathbb{R}^3$ の全体にわたる．関数 f_K は，

$$\begin{aligned}f_K(\vec{k})&=1, &|\vec{k}|\leqslant K,\\ &=0, &|\vec{k}|>K.\end{aligned}$$

にとる．$K\geqslant 0$ は，運動量空間の積分領域を制限するために入れたパラメータであるが，実際は，$K\to\infty$ の極限を問題にする．このKは通常 momentum cutoff とよばれている．

なお，$g_0\in\mathbb{R}$ は，上に示した相互作用の大きさを定める定数である．

H_K は，ヒルベルト空間Xにおける自己共役演算子である

ことが示せる.

一方,

(3.4)　$H:\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\mu\alpha+\int\left[\beta(\vec{k})+\dfrac{g_0\alpha}{k^2-\mu}\right]d^3k\\ g_0\alpha+k^2\beta\end{pmatrix}$

を考える. このHも自己共役演算子であり, しかも$K\to\infty$のとき

(3.5)　$H_K \xrightarrow{R} H$

であることが証明できる.

この例では, H_KのスペクトルはパラメータKの値によらず, 実軸上の固有値$\mu<0$と, 実軸の正の部分をおおう連続スペクトルより成る. Hのスペクトルもこれと同じである.

ところで, この例で重要なのは, H_KとHの定義域の関係である. $D(H_K)$はKによらない. 従って$D(H_K)\cap D(H)$もKによらない集合であるが, これは空間Xにおいてdenseではない. それ故, 定理2(§1)の条件を満たすようなHのcore Dは存在しない.

なお, 他方で

(3.6)　$\lim_{K\to\infty}\delta\mu_K=-\infty$

であることに注意したい. $\delta\mu_K$は質量のくりこみと解釈される量で, $\mu-\delta\mu_K=\mu_0(K)$をunrenormalized mass, これにたいしμをrenormalized massという. $K\to\infty$の

とき $\mu_0(K)\to\infty$ である．場の量子論で"質量のくりこみの発散"といわれているのは，この事情をさす．

ところで，数学的には，この $\delta\mu_K$ の極限が存在しないことと，上に述べた $D(H_K)\cap D(H)$ が dense でないこととは，関係がある．実際，$\delta\mu_K$ の極限が存在しないことは，$x_0=(1,0)$ というベクトルが $D(H_K)\cap D(H)$ に入っていないことに由来している．この x_0 は，$H(g_0=0)\equiv H_0$ の固有ベクトルである．

ここで，H_0 を無摂動ハミルトニアンとみて，H_K を

(3.7) $$H_K = H_0 + V_K$$

と書こう．そうすると，V_K は trace class の演算子であることが示せる．いいかえると，二つの自己共役演算子の対 (H_0, H_K) によって定義される摂動は，trace class の摂動である．そして，

(3.8) $$\mathrm{tr}\, V_K = -\delta\mu_K$$

の関係が成り立っている．

一方，(H_0, H) によって定義される摂動は trace class の摂動ではない．ハミルトニアン H は，無摂動ハミルトニアン H_0 と何かある演算子 V との和の形に書けない．しかし，この摂動は，H の resolvent と H_0 の resolvent との差が trace class の演算子である，ということによって特徴づけ

られる．Birman と Krein は，この種の摂動にたいしても，wave operator や scattering operator が定義できることを証明した［4］．従って，物理的に reasonable な散乱理論が展開できる．

いま考えているモデルでは，二個の A 粒子の間で S 波の散乱がおこる．そこで，trace class の摂動（H_0, H_K）によって記述される散乱と，Birman－Krein の摂動（H_0, H）によって記述される散乱とを比較してみよう．一番大切な点は，散乱の phase shift $\delta(\omega)$ の高エネルギー極限 $\omega \to \infty$ でのふるまいが違うことである．trace class の摂動では，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, d\omega = -\pi \,\mathrm{tr}\, V_K \tag{3.9}$$

の関係があって，$\delta(\omega)$ は，連続関数と仮定するかぎり，$\omega \to \infty$ でかなり早く 0 に近づかなければならない．一方，（H_0, H）による散乱では，具体的な計算によると［5］，ω の大きいところで $\delta(\omega) \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ で，その結果（3.9）の積分は収束しない．このことと，質量のくりこみの発散とが関連していることは，（3.8）から明かである．

§4．相互作用定数のくりこみを含む場の理論のモデル［6］

二個の A 粒子から成る系を考え，$A + A \leftrightarrow A + A$ という相互作用を行なっているとする．ヒルベルト空間として，

(4.1) $$X_1 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$$
をとり，その元を$\beta(\vec{k})$と書く．ハミルトニアン

(4.2) $$H_K: \quad \beta \longmapsto k^2\beta - \lambda_0(K) f_K (f_K, \beta)$$
を考える．関数f_Kは，前の例に出て来たものと同じで，パラメータKは momentum cutoff という意味をもっている．$\lambda_0(K)$は，上に示した相互作用の強さを与える定数であるが，これがKに依存するとし，Kの大きいところでのふるまいが

(4.3) $$\frac{1}{\lambda_0(K)} = 4\pi K + \frac{1}{\lambda} + \cdots$$

のようであるとする．書かなかった部分は，$K \to \infty$で0になる項である．$\lambda \in \mathbb{R}$は，くりこまれた相互作用定数と解釈される．

$\lambda < 0$のとき，十分大きいKにたいし，H_Kは実軸上に一つの固有値$\mu_K < 0$をもち，これは，$K \to \infty$のとき

(4.4) $$\mu \equiv -(1/2\pi^2\lambda)^2$$
に近づくことが示せる．μ_Kは，二個のA粒子がつくる束縛状態の結合エネルギーと解釈される量である．

H_Kは自己共役演算子であり，そのスペクトルは，固有値$\mu_K < 0$と実軸の正の部分をおおう連続スペクトルより成る．

次に，ハミルトニアンHを

(4.5) $$H: \quad \beta \longmapsto \hat{\alpha} + k^2\beta$$

によって定義する．ここに$\hat{\alpha}$は，βと次の関係によって結ばれているものとする：

$$(4.6) \qquad \int \left[\beta(\vec{k}) + \frac{\hat{\alpha}}{k^2 - \mu} \right] d^3k = 0.$$

Hもまた自己共役演算子である．

このHをまとまった形に書くことも出来る：

$$(4.7) \qquad H\beta = k^2\beta - \frac{1}{4\pi} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} (f_K, \beta).$$

この形に書くと，一見，Hはパラメータμに無関係のようであるが，実際は，Hの定義域が（4.6）によって制限されているため，この条件を通してμに関係している．そのことは，実際に固有値問題を解くと，μに依存する固有値が得られることによって確認される．

Hのスペクトルは，固有値$\mu<0$と実軸の正の部分をおおう連続スペクトルより成る．

以上のH_K，Hにたいして，$K\to\infty$のとき

$$(4.8) \qquad H_K \xrightarrow{R} H$$

であることが示せる．

この例では，定理2（§1）の条件が成り立っている．いまDとして，

$$\int \beta(\vec{k})\, d^3k = 0, \qquad k^2\beta \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3),$$

を満たすようなβの集まりを考える．DはHの core になっており，しかも $D \subset D(H_K)$，そしてすべての $\beta \in D$ にたいして

$$\underset{K\to\infty}{s\text{-}\lim}\ H_K \beta = H\beta$$

が成り立っている．

この場合，実は，すべての $\beta \in D$ にたいし $H\beta = k^2\beta$ である．そこで，無摂動ハミルトニアン

(4.9) $\qquad H_0 : \beta \longmapsto k^2\beta$

を定義し，この H_0 をD上へ制限したものを $\hat{H}_0$ と書くことにすれば，

$$\hat{H}_0 : \beta \longmapsto k^2\beta, \qquad D(\hat{H}_0) = D,$$

は closed symmetric operator であることが示せる．

H_0 は $\hat{H}_0$ の自己共役な拡張の一つであるが，$\hat{H}_0$ の不足指数は（1，1）で，その自己共役な拡張はユニークでない．実際に $\hat{H}_0$ のすべての可能な自己共役拡張を求めてみると，くりこまれた相互作用定数λで区別される一連の演算子が得られ，それらが上のHと同じものであることが示せる．Berezin と Faddeev は，ここに扱ったのと本質的に同一のモデルを考察し，まず H_0 の制限 $\hat{H}_0$ をつくり，次にそのすべての可能な自己共役拡張を求めるというやり方で，くりこまれたハミルトニアンHを見いだした［7］．

なお，closed symmetric operator の不足指数が有限で，二つとも等しい場合，この演算子の自己共役拡張として得られるすべての演算子は同一の連続スペクトルをもつ，という定理がある．上の例で，H_0 と H の連続スペクトルは同一である．

前の例と同様に，(H_0, H) で定まる摂動は Birman-Krein の摂動である．従って，散乱理論が展開できる．

一方，(H_0, H_K) は trace class の摂動である．実際，

(4.10) $$H_K = H_0 + V_K, \quad |\mathrm{tr}\, V_K| < \infty.$$

ところが，この例では，

(4.11) $$\lim_{K\to\infty} \mathrm{tr}\, V_K = 0$$

になっている．これは，

(4.12) $$\lim_{K\to\infty} \lambda_0^{-1}(K) = \infty$$

の発散と関係している．これは，"相互作用定数のくりこみの発散" である．

くりこまれた相互作用定数とくりこまれないそれとの比を，通常

(4.13) $$\lambda / \lambda_0 = Z$$

と書く．Z を λ_0 の関数とみると，

(4.14) $$Z^{-1} = 1 - \lambda_0 (4\pi K + \cdots)$$

のようになっている．ここでもし λ_0 が有限の定数だったと

したら，$K\to\infty$のときZ^{-1}は発散する．しかし，Zをλの関数として書くと，こんどは，

(4.15)　　$Z = 1 + \lambda(4\pi K + \cdots)$

となり，λを有限にして$K\to\infty$とすると，Z自身が発散する．通常"くりこみ定数Zの発散"とよばれているのは，このような事情をさす．

§5．素粒子と複合粒子［8］

くりこみの発散が問題になるような場の理論のモデルで，R収束の例になっているものを二つあげた．ところで，この二つのモデルの間の関係も，また，R収束の概念によって理解できる．

はじめの例で，C粒子の静止質量μは，ハミルトニアンH(3.4)の点スペクトルとして与えられた．あとの例では，ハミルトニアンH_1（以下(4.5)で定義されるHのことをH_1と書く）の点スペクトルとして得られるμは，二個のA粒子のつくる束縛状態の結合エネルギーをあらわすものであった．これは，物理学の見地からは，質量μの粒子を"素粒子"として扱うか，"複合粒子"として扱うかという問題に関連している．

そこで，はじめの例を，Cを素粒子と考える理論（略して

素粒子の理論），あとの例を複合粒子理論とよぶことにする．

次に，この二つの理論の関係が，数式の上ではどうなっているかを調べよう．

素粒子の理論のハミルトニアンは，ヒルベルト空間X（3.1）における演算子で，（3.4）によって与えられた．このHによる発展方程式，すなわちシュレーディンガー方程式は，

$$(5.1)\quad \begin{cases} i\dfrac{d}{dt}\alpha(t) = \mu\alpha(t) + g_0\displaystyle\int\Big[\beta(\vec{k},t) + \frac{g_0\alpha(t)}{k^2-\mu}\Big]d^3k, \\ i\dfrac{d}{dt}\beta(\vec{k},t) = g_0\alpha(t) + k^2\beta(\vec{k},t). \end{cases}$$

$g_0\alpha \equiv \hat{\alpha}$ とおくと，（5.1）は次のように書き直せる：

$$(5.2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{g_0^2}\, i\dfrac{d\hat{\alpha}}{dt} = \dfrac{\mu}{g_0^2}\hat{\alpha} + \displaystyle\int\Big[\beta + \frac{\hat{\alpha}}{k^2-\mu}\Big]d^3k, \\ i\dfrac{d\beta}{dt} = \hat{\alpha} + k^2\beta \end{cases}$$

変数をいちいち書くことは省略した．ここで，$\hat{\alpha}$ を有限にたもって $g_0^2 \to \infty$ の極限を考える．

これは，微分方程式の最高階の微分の前に微小パラメータがある，いわゆる singular perturbation の問題である．流体力学で，境界層の問題に出てくる方程式と似ているが，空間変数のかわりに時間変数が問題になっていることと，左辺に i がかかっていることが違う．そのため，時間について，境界層は生じないで，そのかわり infinite oscillation が

あらわれる．

古典的な singular perturbation の理論に従って，(5.2) において $g_0^2=\infty$ として得られる方程式を reduced system とよぶ．これは，次の形の方程式である：

$$(5.3)\quad \begin{cases} 0 = \int [\beta + \dfrac{\hat{\alpha}}{k^2-\mu}]\, d^3k, \\ i\dfrac{d\beta}{dt} = \hat{\alpha} + k^2\beta. \end{cases}$$

これはまさしく，複合粒子理論のシュレーディンガー方程式になっている．すなわち，ヒルベルト空間 X_1 (4.1) におけるハミルトニアン H_1 (4.5)(4.6) によって与えられる発展方程式である．

ここで，g_0^2 が非常に大きいときの (5.2) の解と reduced system (5.3) の解との差をつくると，無限に早く振動する $e^{-iCg_0^2t}$ の形の関数を生ずる．もし，方程式に i がなかったら，ϵ を微小パラメータとして $e^{-t/\epsilon}$ の形の関数が出てまることになるが，これは厚さが ϵ の境界層を与える．

次に，resolvent に注目して，二つの理論の関係を調べてみよう．

素粒子の理論のハミルトニアン H から，その resolvent $R(z;g_0)$ をつくる．これは，パラメータ g_0 に依存している．ここで，$g_0^2\to\infty$ の極限をとると，

$$(5.4)\qquad \underset{g_0^2\to\infty}{s\text{-}\lim}\ R(z;g_0) = R'(z)$$

はたしかに存在し，$R'(z)$ は pseudo-resolvent である．しかし，その（zによらない）kernel Nは trivial ではない： $N \neq \{0\}$.

実際この場合Nは，$(\alpha,0)$の形のベクトルの全体であることがわかる．従って，

$$(5.5)\qquad X = N \oplus X_1 .$$

さらに，$R'(z)$をX_1に制限したものは，

$$(5.6)\qquad R'(z)\,|\,X_1 = (H_1 - z)^{-1}$$

であることが示せる．X_1は複合粒子理論のヒルベルト空間であり，H_1はその理論のハミルトニアンである．

素粒子の理論で，固有値μにぞくする固有ベクトルを求めてみると，

$$(5.7)\qquad x_c = Z_c^{1/2}\left(1,\ -\frac{g_0}{k^2-\mu}\right)$$

が得られる．ここにZ_cは，ベクトルx_cを規格化するための因子で，

$$(5.8)\qquad Z_c^{-1} = 1 + \frac{2\pi g_0^2}{\sqrt{-\mu}}$$

と計算される．Z_cは，ハミルトニアンHの固有状態として

与えられる物理的C粒子の中に，無摂動ハミルトニアン H_0 の固有状態 $x_0 = (1, 0)$ であらわされる（いわゆる裸の）C粒子が混っている確率と解釈される量である：$Z_C = |(x_C, x_0)|^2$ これを，（C粒子にたいする）"波動関数のくりこみ"とよんでいる．

ここで，$g_0^2 \to \infty$ の極限を考えると，

(5.9) $\qquad Z_C \to 0$

であることがわかる．一般に，場の量子論では，ある粒子の波動関数のくりこみ，すなわち Z が 0 であることは，その粒子が複合粒子と考えられるための判定条件とみなされている．

$Z_C \to 0$ でも，$Z_C g_0^2 \to g^2$ はある有限値を与える．この g は，くりこまれた相互作用定数と解釈される．これは，複合粒子と考えられたC粒子と，素粒子であるA粒子との間の相互作用の大きさを定める．

§6．おわりに

上に扱った二つの理論は，そのそれぞれにおいて，くりこみの対象となる発散量が（本質的に）一つしかない，という特徴をもつ．素粒子の理論では，C粒子の質量のくりこみにおいて発散があらわれ，複合粒子理論では，相互作用定数のくりこみが発散した．

これにたいして，実在する基本粒子にかんする理論，たとえば電子と光子にかんする量子電気力学では，本質的に二つの発散するくりこみ量（電子の質量のくりこみと電荷のくりこみ）がある．量子電気力学の場合にこの発散の事情を分析することは，基礎方程式が正確に解けないため，摂動展開による近似を行なわなければならない，ということによって非常に複雑になる．そのため，くりこみということの数学的意味をはっきりとりだすことが困難である．

そこで，発散するくりこみ量が少くとも二つあり，しかも近似なしに正確に扱える場の理論のモデルがほしい．そのようなモデルとして知られているものの一つに，Lee model がある．これは，三種類の粒子 V，N，θ があって，$V \leftrightarrow N+\theta$ のような相互作用を行なうものである．V粒子の質量と，この相互作用の大きさをきめる定数が，くりこみの対象となる．

ところが，このモデルで cutoff K を無限大にした極限でなお有限な理論を得るためには，通常のヒルベルト空間のかわりに，indefinite metric をもった状態ベクトルの空間が必要であるといわれている．ただし，ここにいう metric は，理論の物理的解釈（いわゆる量子力学の確率解釈）に関連して考えられる sesquilinear form のことである．この

formにかんして，ハミルトニアンがエルミート対称である
ことが要求される．

しかし，一方で，数学的分析の便宜のため，状態ベクトルの空間にもう一つの，これは正定値のsesquilinear form つまり内積を導入し，これにかんして空間がヒルベルト空間になるようにすることが出来る．ただし，この内積にかんして，ハミルトニアンは一般に自己共役ではない．

もし，この空間でハミルトニアンをclosed operatorとして定義することが出来たら，一般のBanach空間におけるR収束の理論を適用することが可能であろう．

この場合は，基礎になる空間の構成ということに関連して，数学的にいろいろの議論が必要になり，また他方では，計量の不定性に関連して，理論の物理的解釈の面でもいろいろ考えなければならないことが生じてくる．これについては，他の機会に論ずることにしたい．

文　献

[1] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, 1966.

[2] J. Glimm and A. Jaffe, Comm. pure appl. math. 22 (1969) 401 - 414.

[3] K. Sekine, C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965) 4995 - 4998 ; 262A (1966) 158 - 161.

K. Sekine, Acta Phys. Austriaca Supp. III, Elementary particle theories, Springer-Verlag, 1966, p. 440 - 463.

関根克彦, 数理解析研講究録 118 (1971) 13 - 39.

[4] M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 475 - 478.

M. G. Kreĭn, Dokl. Acad. Nauk SSSR 144 (1962) 268 - 271.

[5] K. Sekine, The wave and scattering operators in a model of quantum field theory with infinite mass renormalization, Preprint 1968, unpublished.

[6] K. Sekine, Structure mathématique d'une

théorie renormalisable, Preprint 1966, unpublished.
関根克彦，数理科学 78 (1969) 42-47.

[7] F. A. Berezin and L. D. Faddeev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961) 1011-1014.

[8] K. Sekine, Nuclear Phys. 76 (1966) 513-538.
関根克彦，ヒルベルト空間における素粒子と複合粒子，1970年，日本物理学会講演.